# Über das kategorielle Denken

Hans-E. Porst

Universität Bremen

2. Dezember 2008

KATMAT

# Outline

# Outline

Was ist das?
- Die üblichen (Vor)Urteile
- Einführendes Beispiel: Wie definiert man $\mathbb{N}$?

Kategorientheorie vs Mengenlehre
- Der "Durchmarsch" der Mengenlehre
- Die kategoriellen Ursprünge

Category Theory at Work
- Linksadjungierte algebraischer Funktoren
- Kategorielle Gruppen

# Outline

# Was ich *nicht* diskutieren will:

Ist Kategorientheorie (KT) primär

1. eine/die Fundierung für die Mathematik?
2. ein Organisationswerkzeug für die Mathematik?
3. ein allgemeiner Werkzeugkasten für die Mathematik?
4. ein Objekt (eine von vielen Theorien) der Mathematik?
5. eine/die Sprache für die Mathematik?

Unbestritten ist der Sprach- und Werkzeugcharakter der KT — und damit auch ein spezifisches kategorielles Denken.

# Was ich *nicht* diskutieren will:

Ist Kategorientheorie (KT) primär

1. eine/die Fundierung für die Mathematik?
2. ein Organisationswerkzeug für die Mathematik?
3. ein allgemeiner Werkzeugkasten für die Mathematik?
4. ein Objekt (eine von vielen Theorien) der Mathematik?
5. eine/die Sprache für die Mathematik?

Unbestritten ist der Sprach- und Werkzeugcharakter der KT — und damit auch ein spezifisches kategorielles Denken.

# Agenda

# Kategorielles Denken ist...

in den Augen von Nicht-Kategorikern

1. ... wenn man kommutative Diagramme malt,
2. ... die Beschäftigung mit Trivialitäten!

Beides hat einen richtigen Kern:

# Kategorielles Denken ist...

in den Augen von Nicht-Kategorikern

1. ... wenn man kommutative Diagramme malt,
2. ... die Beschäftigung mit Trivialitäten!

Beides hat einen richtigen Kern:

# Morphismen im Mittelpunkt!

Kommutative Diagramme sind Gleichungen zwischen Morphismen, und kategorielles Denken stellt die Morphismen in den Mittelpunkt, d.h. insbesondere

- Beachte zu jedem mathematischen Objekt die zugehörigen Morphismen - also mache klar in welcher Kategorie gearbeitet wird!
- Zu jeder Konstruktion von Objekten gehört eine solche von Morphismen!
- Es gibt *Gleichungen* nur zwischen Morphismen!

# Morphismen im Mittelpunkt!





Kommutative Diagramme sind Gleichungen zwischen Morphismen, und kategorielles Denken stellt die Morphismen in den Mittelpunkt, d.h. insbesondere

- Beachte zu jedem mathematischen Objekt die zugehörigen Morphismen - also mache klar in welcher Kategorie gearbeitet wird!
- Zu jeder Konstruktion von Objekten gehört eine solche von Morphismen!
- Es gibt *Gleichungen* nur zwischen Morphismen!

# Morphismen im Mittelpunkt!

Kommutative Diagramme sind Gleichungen zwischen Morphismen, und kategorielles Denken stellt die Morphismen in den Mittelpunkt, d.h. insbesondere

- Beachte zu jedem mathematischen Objekt die zugehörigen Morphismen - also mache klar in welcher Kategorie gearbeitet wird!
- Zu jeder Konstruktion von Objekten gehört eine solche von Morphismen!
- Es gibt *Gleichungen* nur zwischen Morphismen!

# Morphismen im Mittelpunkt!

Kommutative Diagramme sind Gleichungen zwischen Morphismen, und kategorielles Denken stellt die Morphismen in den Mittelpunkt, d.h. insbesondere

- Beachte zu jedem mathematischen Objekt die zugehörigen Morphismen - also mache klar in welcher Kategorie gearbeitet wird!
- Zu jeder Konstruktion von Objekten gehört eine solche von Morphismen!
- Es gibt *Gleichungen* nur zwischen Morphismen!

# Zur Trivialität

> Category Theory's real function is to demonstrate that the trivial parts of mathematics are trivial for trivial reasons, and that is a valuable service which it performs for the mathematical community (P. Freyd).

# Der trivialste kategorielle Begriff:

## Definition

Ein Objekt $I$ in einer Kategorie $\mathbb{K}$ heißt **initial**, falls es für jedes $\mathbb{K}$-objekt $K$ genau einen $\mathbb{K}$-Morphismus

$$\phi\colon I \to K$$

gibt.

## Beispiele

1. $\emptyset$ in **Set**
2. 0 in **Grp**
3. 1 in $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$
4. $\mathbb{Z}$ in **Ring**

# Der trivialste kategorielle Begriff:

## Definition

Ein Objekt $I$ in einer Kategorie $\mathbb{K}$ heißt **initial**, falls es für jedes $\mathbb{K}$-objekt $K$ genau einen $\mathbb{K}$-Morphismus

$$\phi \colon I \to K$$

gibt.

## Beispiele

1. $\emptyset$ in **Set**
2. 0 in **Grp**
3. 1 in $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$
4. $\mathbb{Z}$ in **Ring**

# Der trivialste kategorielle Satz:

**Satz**

*In jeder Kategorie sind initiale Objekte bis auf Isomorphie eindeutig.*

**Beweis** Sind

$$\phi\colon I \to J \text{ und } \psi\colon J \to I.$$

die eindeutig bestimmte Morphismen, so folgt

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_J \text{ und } \psi \circ \phi = \mathrm{id}_I.$$

$\phi$ und $\psi$ sind also Isomorphismen. $\Diamond$

Ein trivialer Satz über ein triviales Konzept - aber:
Viele Eindeutigkeitsaussagen in der Mathematik sind nur Anwendungen dieses Satzes in *geeigneten* Kategorien!

# Der trivialste kategorielle Satz:

**Satz**

*In jeder Kategorie sind initiale Objekte bis auf Isomorphie eindeutig.*

**Beweis** Sind

$$\phi\colon I \to J \text{ und } \psi\colon J \to I.$$

die eindeutig bestimmte Morphismen, so folgt

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_J \text{ und } \psi \circ \phi = \mathrm{id}_I.$$

$\phi$ und $\psi$ sind also Isomorphismen. $\Diamond$

Ein trivialer Satz über ein triviales Konzept - aber:
Viele Eindeutigkeitsaussagen in der Mathematik sind nur Anwendungen dieses Satzes in *geeigneten* Kategorien!

# Der trivialste kategorielle Satz:

**Satz**

*In jeder Kategorie sind initiale Objekte bis auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis Sind

$$\phi\colon I \to J \text{ und } \psi\colon J \to I.$$

die eindeutig bestimmte Morphismen, so folgt

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_J \text{ und } \psi \circ \phi = \mathrm{id}_I.$$

$\phi$ und $\psi$ sind also Isomorphismen. $\Diamond$

Ein trivialer Satz über ein triviales Konzept - aber:
Viele Eindeutigkeitsaussagen in der Mathematik sind nur Anwendungen dieses Satzes in *geeigneten* Kategorien!

# Agenda

Was ist das?

Die üblichen (Vor)Urteile

Einführendes Beispiel: Wie definiert man $\mathbb{N}$?

Kategorientheorie vs Mengenlehre

Der "Durchmarsch" der Mengenlehre

Die kategoriellen Ursprünge

Category Theory at Work

Linksadjungierte algebraischer Funktoren

Kategorielle Gruppen

# Was ist $\mathbb{N}$?

Die konventionelle Antwort:

Eine (die) Menge, die die Peano-Axiome erfüllt!

Nicht die *Menge* $\mathbb{N}$ genügt den Peano-Axiomen, sondern das Tripel $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N})$!
Dieses *Tripel* ist durch sie eindeutig bestimmt!

**Definition**

Ein Tripel $(M, t, e)$ bestehend aus einer Menge $M$, einer Abbildung $t\colon M \to M$ und einem Element $e \in M$ (einer Abbildung $e\colon 1 \to M$) heiße **Peano-Algebra**.

# Was ist $\mathbb{N}$?

Die konventionelle Antwort:

Eine (die) Menge, die die Peano-Axiome erfüllt!

Nicht die *Menge* $\mathbb{N}$ genügt den Peano-Axiomen, sondern das Tripel $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N})$!
Dieses *Tripel* ist durch sie eindeutig bestimmt!

**Definition**

Ein Tripel $(M, t, e)$ bestehend aus einer Menge $M$, einer Abbildung $t\colon M \to M$ und einem Element $e \in M$ (einer Abbildung $e\colon 1 \to M$) heiße **Peano-Algebra**.

# Was ist $\mathbb{N}$?

Die konventionelle Antwort:

Eine (die) Menge, die die Peano-Axiome erfüllt!

Nicht die *Menge* $\mathbb{N}$ genügt den Peano-Axiomen, sondern das Tripel $(\mathbb{N}, \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N})$!
Dieses *Tripel* ist durch sie eindeutig bestimmt!

**Definition**

Ein Tripel $(M, t, e)$ bestehend aus einer Menge $M$, einer Abbildung $t\colon M \to M$ und einem Element $e \in M$ (einer Abbildung $e\colon 1 \to M$) heiße **Peano-Algebra.**

# Der "Beweis" der Eindeutigkeit

Mittels *rekursiver Definition* einer (eindeutig bestimmten) Abbildung $\phi\colon \mathbb{N} \to M$ [wobei $(M, M \xrightarrow{t} M, e \in M)$ eine weitere Peano-Algebra ist], so daß das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "\phi"'] & \mathbb{N} \arrow[dd, "\phi"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "e"'] & & \\
 & M \arrow[r, "t"'] & M
\end{tikzcd}
$$

kommutiert.

$\phi$ soll also ein Homomorphismus von Peano-Algebren sein.

# Der "Beweis" der Eindeutigkeit

Mittels *rekursiver Definition* einer (eindeutig bestimmten) Abbildung $\phi\colon \mathbb{N} \to M$ [wobei $(M, M \xrightarrow{t} M, e \in M)$ eine weitere Peano-Algebra ist], so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "\phi"'] & \mathbb{N} \arrow[dd, "\phi"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "e"'] & & \\
 & M \arrow[r, "t"'] & M
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

$\phi$ soll also ein Homomorphismus von Peano-Algebren sein.

# Und weshalb geht das????

Jedenfalls nicht so einfach, wie man in der Erstsemester-Vorlesung tut!

Leicht beweisbar ist lediglich (mittels Induktion):

1. Ein solches $\phi$ ist eindeutig bestimmt, sofern es existiert.
2. Es ist dann auch umkehrbar, sofern $(M, t, e)$ ebenfalls den Peano-Axiomen genügt.

Die *Existenz* von $\phi$ ist aber nicht klar (wenn auch plausibel)!
Es ist also mindestens eine Frage der intellektuellen Ehrlichkeit (den Erstsemestern gegenüber), hier nochmals nachzudenken.

# Und weshalb geht das????

Jedenfalls nicht so einfach, wie man in der Erstsemester-Vorlesung tut!

Leicht beweisbar ist lediglich (mittels Induktion):

1. Ein solches $\phi$ ist eindeutig bestimmt, sofern es existiert.
2. Es ist dann auch umkehrbar, sofern $(M, t, e)$ ebenfalls den Peano-Axiomen genügt.

Die *Existenz* von $\phi$ ist aber nicht klar (wenn auch plausibel)!
Es ist also mindestens eine Frage der intellektuellen Ehrlichkeit (den Erstsemestern gegenüber), hier nochmals nachzudenken.

# Und weshalb geht das????

Jedenfalls nicht so einfach, wie man in der Erstsemester-Vorlesung tut!

Leicht beweisbar ist lediglich (mittels Induktion):

1. Ein solches $\phi$ ist eindeutig bestimmt, sofern es existiert.
2. Es ist dann auch umkehrbar, sofern $(M, t, e)$ ebenfalls den Peano-Axiomen genügt.

Die *Existenz* von $\phi$ ist aber nicht klar (wenn auch plausibel)!
Es ist also mindestens eine Frage der intellektuellen Ehrlichkeit (den Erstsemestern gegenüber), hier nochmals nachzudenken.

# Zu beweisen wäre also:

**Lemma (Rekursionslemma)**

*Zu jeder Peano-Algebra* $(M, t, e)$ *gibt es genau einen Homomorphismus* $\phi\colon (\mathbb{N}, s, 0) \to (M, t, e)$.

... und das ist eine durchaus mühsame Folgerung aus den Peano-Axiomen!

# Zwischeneinsicht:

Wir sind an einer Aussage in der Kategorie **PAlg** interessiert und *nicht* etwa in der Kategorie **Set**!

Das Rekursionslemma ist dabei in kategorieller Sprache nichts anderes als:

$(\mathbb{N}, s, 0)$ *ist ein initiales Objekt in der Kategorie* **PAlg***.*

.... und somit eindeutig mit diese Eigenschaft.

# Zwischeneinsicht:

Wir sind an einer Aussage in der Kategorie **PAlg** interessiert und *nicht* etwa in der Kategorie **Set**!

Das Rekursionslemma ist dabei in kategorieller Sprache nichts anderes als:

$(\mathbb{N}, s, 0)$ *ist ein initiales Objekt in der Kategorie* **PAlg***.*

.... und somit eindeutig mit diese Eigenschaft.

# Und was hilft uns diese Einsicht?

Wir können die natürlichen Zahlen einfach so definieren:

**Definition**

Die $(\mathbb{N}, s, 0)$ ist eine (die) initiale Peano-Algebra.

Und dann (im Vergleich zum Rekursionslemma leicht) nachweisen, daß die initiale Peano-Algebra den Peano-Axiomen genügt.

# Und was hilft uns diese Einsicht?

Wir können die natürlichen Zahlen einfach so definieren:

**Definition**

Die $(\mathbb{N}, s, 0)$ ist eine (die) initiale Peano-Algebra.

Und dann (im Vergleich zum Rekursionslemma leicht) nachweisen, daß die initiale Peano-Algebra den Peano-Axiomen genügt.

# Das Induktionsaxiom

**Satz**

*Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit*

1. $n \in T \implies s(n) \in T$
2. $0 \in T$

*so gilt $T = \mathbb{N}$.*

Beweis 1. und 2. bedeuten gerade: $(T, s|_T, 0)$ ist eine Peano-Algebra und die Inklusionsabbildung $i\colon T \to \mathbb{N}$ ist ein Homomorphismus.
Wegen der Initialität gibt es also (genau) ein $\phi\colon \mathbb{N} \to T$. Dann gilt aber, wieder wegen der Initialität, $i \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, so daß $i$ surjektiv ist und damit $T = \mathbb{N}$. $\Diamond$

Skip Nachfolgerabb.

# Das Induktionsaxiom

**Satz**

*Ist $T \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit*

1. $n \in T \implies s(n) \in T$
2. $0 \in T$

*so gilt $T = \mathbb{N}$.*

**Beweis** 1. und 2. bedeuten gerade: $(T, s|_T, 0)$ ist eine Peano-Algebra und die Inklusionsabbildung $i\colon T \to \mathbb{N}$ ist ein Homomorphismus.
Wegen der Initialität gibt es also (genau) ein $\phi\colon \mathbb{N} \to T$.
Dann gilt aber, wieder wegen der Initialität, $i \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, so daß $i$ surjektiv ist und damit $T = \mathbb{N}$. $\Diamond$

Skip Nachfolgerabb.

# Die Nachfolgerabbildung

Das leicht zu beweisende *Lambeksche Lemma* besagt, angewandt auf den betrachteten Fall, daß die Abbildung

$$[s, 0] \colon \mathbb{N} + 1 \to \mathbb{N}$$

bijektiv ist.

Somit ist insbesondere

- $s = [s, 0]|_{\mathbb{N}}$ injektiv und
- $0 \notin \mathbb{N}$.

# Die Nachfolgerabbildung

Das leicht zu beweisende *Lambeksche Lemma* besagt, angewandt auf den betrachteten Fall, daß die Abbildung

$$[s, 0] \colon \mathbb{N} + 1 \to \mathbb{N}$$

bijektiv ist.

Somit ist insbesondere

- $s = [s, 0]|_{\mathbb{N}}$ injektiv und
- $0 \notin \mathbb{N}$.

Und wie definieren **Sie** in Ihrem nächsten Anfängerkurs $\mathbb{N}$?

# Agenda

Die Mathematik der Neuzeit ist beherrscht vom Konzept der Abbildung:

- Differenzierbare, glatte, holomorphe Funktionen (als Gegenstand der Analysis)
- Symmetrien (als Gegenstand von Algebra und Geometrie)

Allerdings fehlte es lange an einem präzisen Abbildungs*begriff*.

Die Mathematik der Neuzeit ist beherrscht vom Konzept der Abbildung:

- Differenzierbare, glatte, holomorphe Funktionen (als Gegenstand der Analysis)
- Symmetrien (als Gegenstand von Algebra und Geometrie)

Allerdings fehlte es lange an einem präzisen Abbildungs*begriff*.

Die erste Axiomatisierung der Morphismenidee und der Komposition: der Gruppenbegriff.

Gruppen sind Kategorien (mit einem Objekt und nur umkehrbaren Morphismen) und wurden (und werden) auch konzeptionell so verstanden.

Auch konzeptionell ist die kategorielle Betrachtungsweise schon lange etabliert:
Das Studium von Objekten mit Hilfe Ihrer Unter- und Quotientenobjekte in der Algebra ist genau dies!

Die erste Axiomatisierung der Morphismenidee und der Komposition: der Gruppenbegriff.

Gruppen sind Kategorien (mit einem Objekt und nur umkehrbaren Morphismen) und wurden (und werden) auch konzeptionell so verstanden.

Auch konzeptionell ist die kategorielle Betrachtungsweise schon lange etabliert:
Das Studium von Objekten mit Hilfe Ihrer Unter- und Quotientenobjekte in der Algebra ist genau dies!

# Der "Durchmarsch" der Mengenlehre

Das Morphismenkonzept ist der Mathematik inhärent - aber das mengentheoretisch begründete Denken herrscht vor! Weshalb?

Dies ist ein Erbe Hilbert's: Sein

> Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.

hat das mengentheoretische Denken "geadelt".

# Der "Durchmarsch" der Mengenlehre

Das Morphismenkonzept ist der Mathematik inhärent - aber das mengentheoretisch begründete Denken herrscht vor! Weshalb?

Dies ist ein Erbe Hilbert's: Sein

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.

hat das mengentheoretische Denken "geadelt".

# Cantors Leistungen

sind zweifach:

- Er hat "das Unendliche strukturiert" - mit Hilfe von Abbildungen, also den **Set**-Morphismen.
- Er hat der Mathematik - *endlich* - eine Sprache gegeben.

Auch wenn auch seine "Definition" von Mengen Euklids "Definition" des Punkts an formaler Qualität nicht übertrifft und der Begriff der Abbildung noch naiver benutzt wird, ist dies eine "Erlösung" für die Mathematik.

# Cantors Leistungen

sind zweifach:

- Er hat "das Unendliche strukturiert" - mit Hilfe von Abbildungen, also den **Set**-Morphismen.
- Er hat der Mathematik - *endlich* - eine Sprache gegeben.

Auch wenn auch seine "Definition" von Mengen Euklids "Definition" des Punkts an formaler Qualität nicht übertrifft und der Begriff der Abbildung noch naiver benutzt wird, ist dies eine "Erlösung" für die Mathematik.

Nach Auftreten der Antinomien, die sich aus Cantors vagem Mengenbegriff ergeben, tut die Mathematik deshalb das Naheliegende:

- Die Mengenlehre wird axiomatisiert (ZF, NBG).

Wenn auch nicht gerade intuitiv, z.B.

$$X \quad \text{ist eine Menge} \quad \Longleftrightarrow \quad X \in Y!!$$

Der grundsätzlich ebenso naheliegende Versuch, stattdessen - z.B. aufbauend auf dem Gruppenbegriff

- den Abbildungsbegriff zu axiomatisieren

wird Anfang des 20. Jhdts. (leider?!) nicht unternommen.

# Agenda

# Die praktische Sprache der Kategorientheorie





Das mengentheoretische Paradigma ist nicht *nur* praktisch ist: Schon vor 1930 wird die (kategorielle) Charakterisierung freier Gruppen bewiesen:

*Eine Gruppe $G$ ist frei über einer (Erzeugenden)Menge $X$ genau dann, wenn sich jede Abbildung von $X$ in eine Gruppe $H$ eindeutig zu einem Homomorphismus von $G$ nach $H$ fortsetzen läßt.*

Dies ist eine Charakterisierung freier Gruppen als *initiales Objekt* in einer geeigneten (Komma-) Kategorie. Deshalb folgt aus dieser Charakterisierung die Eindeutigkeit so leicht!

# Die praktische Sprache der Kategorientheorie

Das mengentheoretische Paradigma ist nicht *nur* praktisch ist: Schon vor 1930 wird die (kategorielle) Charakterisierung freier Gruppen bewiesen:

*Eine Gruppe $G$ ist frei über einer (Erzeugenden)Menge $X$ genau dann, wenn sich jede Abbildung von $X$ in eine Gruppe $H$ eindeutig zu einem Homomorphismus von $G$ nach $H$ fortsetzen läßt.*

Dies ist eine Charakterisierung freier Gruppen als *initiales Objekt* in einer geeigneten (Komma-) Kategorie. Deshalb folgt aus dieser Charakterisierung die Eindeutigkeit so leicht!

# Auch kategorielles *Denken* ist praktisch! (Das Tensorprodukt)





Die universelle (= kategorielle) Beschreibung (ca. 1940) wird durchgängig als die angemessene angesehen. Allerdings wird regelhaft eine mengentheoretische Konstruktion vorangestellt - als Existenzbeweis.

Im Kern geht es darum zu zeigen, daß die *hom*-Funktoren auf **Ab** Linksadjungierte haben:

$$\hom(A \otimes B, C) \simeq \hom(A, \hom(B, C))$$

Dies kann man aber mit *elementare Eigenschaften* von **Ab** und etwas *elementarer Kategorientheorie (dem GAFT)* zeigen!

Skip Proof

# Auch kategorielles *Denken* ist praktisch! (Das Tensorprodukt)

Die universelle (= kategorielle) Beschreibung (ca. 1940) wird durchgängig als die angemessene angesehen. Allerdings wird regelhaft eine mengentheoretische Konstruktion vorangestellt - als Existenzbeweis.

Im Kern geht es darum zu zeigen, daß die *hom*-Funktoren auf **Ab** Linksadjungierte haben:

$$\mathrm{hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{hom}(A, \mathrm{hom}(B, C))$$

Dies kann man aber mit *elementare Eigenschaften* von **Ab** und etwas *elementarer Kategorientheorie (dem GAFT)* zeigen!

▸ Skip Proof

Da *hom*-Funktoren Limiten bewahren, ist nach dem GAFT ist nur zu zeigen, daß es für gegebene abelsche Gruppen $A$ und $G$ nicht "zu viele" Homomorphismen von $G$ nach $\hom(A, B)$ gibt.
Genauer: zu jeder abelschen Gruppe $G$ existiert nur eine *Menge* von Gruppen $\{A_i \mid i \in I\}$ so daß sich jeder Homomorphismus $f \colon G \to \hom(A, B)$ als $f = \hom(A, x) \circ \phi$ mit $\phi \colon G \to \hom(A, A_{i_0})$, $x \colon A_{i_0} \to B$ und $i_0 \in I$ darstellen läßt.
Man sieht leicht, daß eine repräsentative Menge von Quotienten der direkten Summe $\bigoplus_G A$ das Gewünschte leistet:

Die Familie $f(g)$ von Homomorphismen $A \to B$ induziert zunächst einen Homomorphismus $h \colon \bigoplus_G A \to B$. Das Bild $B'$ von $h$ hat in obiger Menge einen Repräsentanten $A_{i_0} \simeq B'$, so daß $h$ faktorisiert als

$$\bigoplus_G A \xrightarrow{h} B = \bigoplus_G A \xrightarrow{q} A_{i_0} \xrightarrow{x} B$$

Mit

$$G \xrightarrow{\phi} A_{i_0} \quad g \mapsto (G \xrightarrow{i_g} \bigoplus_G A \xrightarrow{q} A_{i_0})$$

rechnet man dann leicht die gewünschte Identität $f = \hom(A, x) \circ \phi$ nach.

# Freie topologische Gruppen

Markov (1940) konstruiert zu einem vollständig regulären Raum $(X, \tau)$ eine topologische Hausdorff Gruppe $(F_X, \tau')$ mit den Eigenschaften

1. $F_X$ ist die freie Gruppe über $X$.
2. $(X, \tau)$ ist ein Teilraum des Raums $(F_X, \tau')$.
3. Jede stetige Abbildung von $(X, \tau)$ in eine topologische Hausdorff Gruppe $(G, \sigma)$ läßt sich eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus von $(F_X, \tau')$ nach $(G, \sigma)$ fortsetzen.

# Freie topologische Gruppen

Markov (1940) konstruiert zu einem vollständig regulären Raum $(X, \tau)$ eine topologische Hausdorff Gruppe $(F_X, \tau')$ mit den Eigenschaften

1. $F_X$ ist die freie Gruppe über $X$.
2. $(X, \tau)$ ist ein Teilraum des Raums $(F_X, \tau')$.
3. Jede stetige Abbildung von $(X, \tau)$ in eine topologische Hausdorff Gruppe $(G, \sigma)$ läßt sich eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus von $(F_X, \tau')$ nach $(G, \sigma)$ fortsetzen.

# Freie topologische Gruppen

Markov (1940) konstruiert zu einem vollständig regulären Raum $(X, \tau)$ eine topologische Hausdorff Gruppe $(F_X, \tau')$ mit den Eigenschaften

1. $F_X$ ist die freie Gruppe über $X$.
2. $(X, \tau)$ ist ein Teilraum des Raums $(F_X, \tau')$.
3. Jede stetige Abbildung von $(X, \tau)$ in eine topologische Hausdorff Gruppe $(G, \sigma)$ läßt sich eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus von $(F_X, \tau')$ nach $(G, \sigma)$ fortsetzen.

# Freie topologische Gruppen

Markov (1940) konstruiert zu einem vollständig regulären Raum $(X, \tau)$ eine topologische Hausdorff Gruppe $(F_X, \tau')$ mit den Eigenschaften

1. $F_X$ ist die freie Gruppe über $X$.
2. $(X, \tau)$ ist ein Teilraum des Raums $(F_X, \tau')$.
3. Jede stetige Abbildung von $(X, \tau)$ in eine topologische Hausdorff Gruppe $(G, \sigma)$ läßt sich eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus von $(F_X, \tau')$ nach $(G, \sigma)$ fortsetzen.

Markov bemerkt die Analogie zur universellen Charakterisierung freier Gruppen (s.o.), sowie die zwischen (den Kategorien der) Mengen und topologischen Räume sowie Gruppen und topologischen Gruppen.

Er ahnt also (wie viele andere zu jener Zeit) bereits die Notwendigkeit der *kategoriellen Sprache*.

Ihm ist das kategorielle Denken aber noch fremd!

Sonst hätte er zunächst eine topologische Gruppe mit der universellen Eigenschaft 3. konstruiert (weil diese ja das Objekt bis auf Isomorphie festlegt), und sich danach der Eigenschaften 1. und 2. vergewissert - und so nicht 50 S. Rechnungen gebraucht!

# Das GAFT

Samuel (1948) holt dies nach - ohne kategorielle Sprache (die Eilenberg-Mac Lane Arbeit von 1945 offensichtlich noch nicht kennend), aber kategoriell denkend.

Er zeigt zunächst die Existenz einer topolog. Gruppe mit der geforderten universellen Eigenschaft - mit einem Argument, das im Kern das später nach Freyd benannte **G**eneral **A**djoint **F**unctor **T**heorem liefert.
Der Nachweis der speziellen Eigenschaften 1. und 2. nimmt dann weniger als eine halbe Seite in Anspruch.

Samuel's Variante reicht im übrigen für obigen Beweis der Existenz des Tensorprodukts.

Und die Idee ist einfach (wenn man kategoriell denkt):

Skip Proof

# Das GAFT

Samuel (1948) holt dies nach - ohne kategorielle Sprache (die Eilenberg-Mac Lane Arbeit von 1945 offensichtlich noch nicht kennend), aber kategoriell denkend.

Er zeigt zunächst die Existenz einer topolog. Gruppe mit der geforderten universellen Eigenschaft - mit einem Argument, das im Kern das später nach Freyd benannte **G**eneral **A**djoint **F**unctor **T**heorem liefert.
Der Nachweis der speziellen Eigenschaften 1. und 2. nimmt dann weniger als eine halbe Seite in Anspruch.

Samuel's Variante reicht im übrigen für obigen Beweis der Existenz des Tensorprodukts.

Und die Idee ist einfach (wenn man kategoriell denkt):

Skip Proof

# Das GAFT





Samuel (1948) holt dies nach - ohne kategorielle Sprache (die Eilenberg-Mac Lane Arbeit von 1945 offensichtlich noch nicht kennend), aber kategoriell denkend.

Er zeigt zunächst die Existenz einer topolog. Gruppe mit der geforderten universellen Eigenschaft - mit einem Argument, das im Kern das später nach Freyd benannte **G**eneral **A**djoint **F**unctor **T**heorem liefert.
Der Nachweis der speziellen Eigenschaften 1. und 2. nimmt dann weniger als eine halbe Seite in Anspruch.

Samuel's Variante reicht im übrigen für obigen Beweis der Existenz des Tensorprodukts.

Und die Idee ist einfach (wenn man kategoriell denkt):

Skip Proof

# Das GAFT

Samuel (1948) holt dies nach - ohne kategorielle Sprache (die Eilenberg-Mac Lane Arbeit von 1945 offensichtlich noch nicht kennend), aber kategoriell denkend.

Er zeigt zunächst die Existenz einer topolog. Gruppe mit der geforderten universellen Eigenschaft - mit einem Argument, das im Kern das später nach Freyd benannte **G**eneral **A**djoint **F**unctor **T**heorem liefert.
Der Nachweis der speziellen Eigenschaften 1. und 2. nimmt dann weniger als eine halbe Seite in Anspruch.

Samuel's Variante reicht im übrigen für obigen Beweis der Existenz des Tensorprodukts.

Und die Idee ist einfach (wenn man kategoriell denkt):

Skip Proof

Um die universelle stetige Abbildung $(X,\tau) \xrightarrow{\eta} (F_X,\tau')$ zu definieren, über die *alle* stetigen Abbildungen $(X,\tau) \xrightarrow{f} (G_f,\tau_f)$ eindeutig faktorisieren, betrachte zunächst die von "all diesen" induzierte Abbildung

$$(X,\tau) \xrightarrow{e} \prod_f (G_f,\tau_f)$$

Über diese faktorisiert dann jedenfalls jedes $f$.
(Sie existiert, weil es nicht "zu viele" solche $f$ gibt und der Vergißfunktor von den Hausdorff Gruppen in die Räume Produkte bewahrt).
Die Eindeutigkeit wird erreicht, indem man $e$ über sein Bild $Im(e) =: (F_X,\tau')$ faktorisiert:

$$(X,\tau) \xrightarrow{e} \prod_f (G_f,\tau_f) = (X,\tau) \xrightarrow{\eta} (F_X,\tau') \hookrightarrow \prod_f (G_f,\tau_f)$$

# Agenda

# Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$





**Satz**

*Jede kürzbare kommutative Halbgruppe läßt sich zu einer abelschen Gruppe erweitern, und diese Erweiterung ist universell charakterisierbar.*

**Beweis** Direkte Verallgemeinerung der bekannten Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$. $\Diamond$

In kategorielle Formulierung:

**Satz**

*Der Einbettungsfunktor der Kategorie* **Ab** *der abelschen Gruppen in die Kategorie* **kkHgr** *der kürzbaren kommutativen Halbgruppen hat einen Linksadjungierten.*

# Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$

**Satz**

*Jede kürzbare kommutative Halbgruppe läßt sich zu einer abelschen Gruppe erweitern, und diese Erweiterung ist universell charakterisierbar.*

**Beweis** Direkte Verallgemeinerung der bekannten Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$. $\Diamond$

In kategorielle Formulierung:

**Satz**

*Der Einbettungsfunktor der Kategorie* **Ab** *der abelschen Gruppen in die Kategorie* **kkHgr** *der kürzbaren kommutativen Halbgruppen hat einen Linksadjungierten.*

# ... und weiter?

Weshalb geht das? Die Kategorie **kkHgr** ist ja nicht einmal besonders "schön"!

Haben z.B. auch die Einbettungen

1. von **Ab** in die Kategorie der (nicht notwendig kürzbaren) kommutativen Halbgruppen
2. von **Ab** in die Kategorie der Halbgruppen
3. oder die der abelschen Gruppen in die Gruppen

Linksadjungierte?

# ... und weiter?

Weshalb geht das? Die Kategorie **kkHgr** ist ja nicht einmal besonders "schön"!

Haben z.B. auch die Einbettungen

1. von **Ab** in die Kategorie der (nicht notwendig kürzbaren) kommutativen Halbgruppen
2. von **Ab** in die Kategorie der Halbgruppen
3. oder die der abelschen Gruppen in die Gruppen

Linksadjungierte?

# ... und weiter?

Weshalb geht das? Die Kategorie **kkHgr** ist ja nicht einmal besonders "schön"!

Haben z.B. auch die Einbettungen

1. von **Ab** in die Kategorie der (nicht notwendig kürzbaren) kommutativen Halbgruppen
2. von **Ab** in die Kategorie der Halbgruppen
3. oder die der abelschen Gruppen in die Gruppen

Linksadjungierte?

# ... und weiter?

Weshalb geht das? Die Kategorie **kkHgr** ist ja nicht einmal besonders "schön"!

Haben z.B. auch die Einbettungen

1. von **Ab** in die Kategorie der (nicht notwendig kürzbaren) kommutativen Halbgruppen
2. von **Ab** in die Kategorie der Halbgruppen
3. oder die der abelschen Gruppen in die Gruppen

Linksadjungierte?

Sicher JA für 3. (Kommutatorfaktorgruppe), aber 1., 2.?

# Lawvere

W.L. Lawvere legt in seiner Dissertation (1963) u.a. die Basis zur Beantwortung dieser Fragen. Er stellt die gesamte Birkhoffsche Theorie der "gleichungsdefinierten Algebren" wesentlich effizienter dar, indem er

- Algebren als (Produkte erhaltende) Funktoren nach **Set**
- Homomorphismen als natürliche Transformationen

interpretiert.

▸ Skip Example

**Beispiel**

Sei **T** die Kategorie, die $\mathbb{N}$ als Objektmenge hat und $Mat_{\mathbb{R}}(n, m)$ als Menge der Morphismen von $m$ nach $n$. Dann sind (bis auf Isomorphie) die produkterhaltenden Funktoren genau die $\mathbb{R}$-Vektorräume!

# Lawvere

W.L. Lawvere legt in seiner Dissertation (1963) u.a. die Basis zur Beantwortung dieser Fragen. Er stellt die gesamte Birkhoffsche Theorie der "gleichungsdefinierten Algebren" wesentlich effizienter dar, indem er

- Algebren als (Produkte erhaltende) Funktoren nach **Set**
- Homomorphismen als natürliche Transformationen

interpretiert.

Skip Example

## Beispiel

Sei **T** die Kategorie, die $\mathbb{N}$ als Objektmenge hat und $Mat_{\mathbb{R}}(n, m)$ als Menge der Morphismen von $m$ nach $n$. Dann sind (bis auf Isomorphie) die produkterhaltenden Funktoren genau die $\mathbb{R}$-Vektorräume!

In **T** (dies ist nichts anderes als die duale eines Skeletts von $_{\mathbb{R}}$**Vekt**) ist $n$ ein $n$-faches Produkt von 1, ein produkterhaltender Funktor $F$ von **T** nach **Set** also insbesondere eine Menge $V = F(1)$ zusammen mit all ihren endlichen (kartesischen) Produkten $V^n$.
Und für einen Morphismus $m \xrightarrow{\tau} 1$ in **T**, also eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, d.h. ein $m$-Tupel $(r_1, \ldots, r_m)$, ist

$$F(\tau)\colon V^m = F(m) \to F(1) = V$$

die Abbildung mit

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum r_i v_i$$

Dank dieser Beschreibung gleichungsdefinierter Algebren kann man

- die Kategorien solcher Algebren (Varietäten) als Kategorien mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren,
- wichtige ad-hoc Begriffe der Birkhoffschen Theorie durch kanonische ersetzen, z.B.
  *eine Algebra $A$ erzeugt eine Varietät* $\mathbf{V}$
  ($\mathbf{V} = HSP(A)$ oder "in $A$ gelten genau die Gleichungen, die in $\mathbf{V}$ gelten")
  *genau dann wenn $A$, als Funktor aufgefaßt, treu ist.*
- Sätze beweisen wie den folgenden

Dank dieser Beschreibung gleichungsdefinierter Algebren kann man

- die Kategorien solcher Algebren (Varietäten) als Kategorien mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren,
- wichtige ad-hoc Begriffe der Birkhoffschen Theorie durch kanonische ersetzen, z.B.
  *eine Algebra $A$ erzeugt eine Varietät* $\mathbf{V}$
  ($\mathbf{V} = HSP(A)$ oder "in $A$ gelten genau die Gleichungen, die in $\mathbf{V}$ gelten")
  *genau dann wenn $A$, als Funktor aufgefaßt, treu ist.*
- Sätze beweisen wie den folgenden

Dank dieser Beschreibung gleichungsdefinierter Algebren kann man

- die Kategorien solcher Algebren (Varietäten) als Kategorien mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren,
- wichtige ad-hoc Begriffe der Birkhoffschen Theorie durch kanonische ersetzen, z.B.
  *eine Algebra A erzeugt eine Varietät* **V**
  ($\mathbf{V} = HSP(A)$ oder "in $A$ gelten genau die Gleichungen, die in **V** gelten")
  *genau dann wenn A, als Funktor aufgefaßt, treu ist.*
- Sätze beweisen wie den folgenden

Dank dieser Beschreibung gleichungsdefinierter Algebren kann man

- die Kategorien solcher Algebren (Varietäten) als Kategorien mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren,
- wichtige ad-hoc Begriffe der Birkhoffschen Theorie durch kanonische ersetzen, z.B.
  *eine Algebra $A$ erzeugt eine Varietät* $\mathbf{V}$
  ($\mathbf{V} = HSP(A)$ oder "in $A$ gelten genau die Gleichungen, die in $\mathbf{V}$ gelten")
  *genau dann wenn $A$, als Funktor aufgefaßt, treu ist.*
- Sätze beweisen wie den folgenden

# Algebraische Funktoren haben Linksadjungierte

**Theorem**

*Jeder Funktor zwischen Varietäten, der mit deren kanonischen Vergißfunktoren kommutiert, hat einen Linksadjungierten.*

**Beispiele**

für solche Linksadjungierten:

1. alle oben genannten (und vermißten!) Konstruktionen,
2. die Monoid-Algebra,
3. die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra,

# Algebraische Funktoren haben Linksadjungierte

## Theorem

*Jeder Funktor zwischen Varietäten, der mit deren kanonischen Vergißfunktoren kommutiert, hat einen Linksadjungierten.*

## Beispiele

für solche Linksadjungierten:

1. alle oben genannten (und vermißten!) Konstruktionen,
2. die Monoid-Algebra,
3. die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra,

# Algebraische Funktoren haben Linksadjungierte

## Theorem

*Jeder Funktor zwischen Varietäten, der mit deren kanonischen Vergißfunktoren kommutiert, hat einen Linksadjungierten.*

## Beispiele

für solche Linksadjungierten:

1. alle oben genannten (und vermißten!) Konstruktionen,
2. die Monoid-Algebra,
3. die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra,

# Algebraische Funktoren haben Linksadjungierte





## Theorem

*Jeder Funktor zwischen Varietäten, der mit deren kanonischen Vergißfunktoren kommutiert, hat einen Linksadjungierten.*

## Beispiele

für solche Linksadjungierten:

1. alle oben genannten (und vermißten!) Konstruktionen,
2. die Monoid-Algebra,
3. die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra,

# Algebraische Funktoren haben Linksadjungierte





## Theorem

*Jeder Funktor zwischen Varietäten, der mit deren kanonischen Vergißfunktoren kommutiert, hat einen Linksadjungierten.*

## Beispiele

für solche Linksadjungierten:

1. alle oben genannten (und vermißten!) Konstruktionen,
2. die Monoid-Algebra,
3. die universelle Einhüllende einer Lie-Algebra,

Der Satz (und die Idee, daß Algebren Funktoren sind) kann weit über Varietäten hinaus verallgemeinert werden.

Ob die Form des Linksadjungierten von spezieller Struktur ist, ist eine Folgefrage.

Problem (DPA): Beschreibe die Konstruktion der Clifford Algebra zu einem quadratischen Raum in diesem Kontext (finde die "richtigen" Kategorien!)

Der Satz (und die Idee, daß Algebren Funktoren sind) kann weit über Varietäten hinaus verallgemeinert werden.

Ob die Form des Linksadjungierten von spezieller Struktur ist, ist eine Folgefrage.

Problem (DPA): Beschreibe die Konstruktion der Clifford Algebra zu einem quadratischen Raum in diesem Kontext (finde die "richtigen" Kategorien!)

# Agenda

Was ist das?

- Die üblichen (Vor)Urteile
- Einführendes Beispiel: Wie definiert man $\mathbb{N}$?

Kategorientheorie vs Mengenlehre

- Der "Durchmarsch" der Mengenlehre
- Die kategoriellen Ursprünge

Category Theory at Work

- Linksadjungierte algebraischer Funktoren
- Kategorielle Gruppen

Es ist ein vertrautes Prinzips in der Mathematik, nur Isomorphietypen zu betrachten (Skelett statt der ganzen Kategorie) und ggf. durch Invarianten zu charakterisieren (d.h. auch noch die Morphismen des Skeletts zu vergessen):

## Beispiele

1. Statt ${}_k$**Vekt** nur Matrizen betrachten.
2. $\mathbb{N}$ als Menge der Isomorphietypen von **FinSet**.

Ein fruchtbares mathematisches Prinzip, aber:
Verlust an Information und Ausdrucksstärke:

Skip Rechenregeln

z.B. sind die arithmetischen Regeln

1. Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation,
2. das Distributivgesetz,
3. die Potenzrechenregeln

i.w. kategorielle Eigenschaften von **FinSet** [jeder Funktor $X \times -$ ist linksadjungiert zu hom$(X, -)$], die man $\mathbb{N}$ nicht mehr direkt ansieht!

# Kategorifizierung

ist die Umkehrung dieses Vorgehens.

*moderate Version*:

Ersetze (in einem Skelett) Gleichungen durch Isomorphismen.

**Beispiel**

- aus Gruppen als 1-objektigen Kategorien werden *zusammenhängende Gruppoide* (Brandt 1925).

# Kategorifizierung

ist die Umkehrung dieses Vorgehens.

*moderate Version*:

Ersetze (in einem Skelett) Gleichungen durch Isomorphismen.

## Beispiel

- aus Gruppen als 1-objektigen Kategorien werden *zusammenhängende Gruppoide* (Brandt 1925).

*radikale Version*

Ersetze:

- Mengen durch Kategorien,
- Abbildungen durch Funktoren,

und ggf.

- Gleichungen zwischen Elementen durch Isomorphismen,
- Gleichungen zwischen Abbildungen durch natürliche Isomorphismen.

Emmy Noether!
Homologiegruppen-*Funktor* von **Top** nach **Grp** statt Betti-Zahlen-*Abbildung* von Isomorphietypen von **Top** nach **Set**!

*radikale Version*

Ersetze:

- Mengen durch Kategorien,
- Abbildungen durch Funktoren,

und ggf.

- Gleichungen zwischen Elementen durch Isomorphismen,
- Gleichungen zwischen Abbildungen durch natürliche Isomorphismen.

Emmy Noether!
Homologiegruppen-*Funktor* von **Top** nach **Grp** statt Betti-Zahlen-*Abbildung* von Isomorphietypen von **Top** nach **Set**!

# Monoidale Kategorien

## Beispiel

- Aus Monoiden werden *monoidale Kategorien*.

# Monoidale Kategorien

## Beispiel

- Aus Monoiden werden *monoidale Kategorien*.

Menge $M$ $\mapsto$ Kategorie $\mathbb{K}$

# Monoidale Kategorien

## Beispiel

- Aus Monoiden werden *monoidale Kategorien*.

Menge $M$ $\mapsto$ Kategorie $\mathbb{K}$

Abbildung $M \times M \xrightarrow{-\cdot-} M$ $\mapsto$ Funktor $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{-\otimes-} \mathbb{K}$

# Monoidale Kategorien





## Beispiel

- Aus Monoiden werden *monoidale Kategorien*.

| | |
|---|---|
| Menge $M$ | $\mapsto$ Kategorie $\mathbb{K}$ |
| Abbildung $M \times M \xrightarrow{-\cdot-} M$ | $\mapsto$ Funktor $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{-\otimes-} \mathbb{K}$ |
| Element $e$ in $M$ | $\mapsto$ Objekt $I$ in $\mathbb{K}$ |

# Monoidale Kategorien





## Beispiel

- Aus Monoiden werden *monoidale Kategorien*.

| | |
|---|---|
| Menge $M$ | $\mapsto$ Kategorie $\mathbb{K}$ |
| Abbildung $M \times M \xrightarrow{-\cdot-} M$ | $\mapsto$ Funktor $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{-\otimes-} \mathbb{K}$ |
| Element $e$ in $M$ | $\mapsto$ Objekt $I$ in $\mathbb{K}$ |

Beispiele: (**Ab**, $- \otimes -, \mathbb{Z}$), Nicht-kommutative Geometrie

# Bikategorien

## Beispiele

- Aus Kategorien werden *Bikategorien*
- (Bei *strikter* Beibehaltung der Axiome: *2-Kategorien*.)

# Bikategorien

## Beispiele

- Aus Kategorien werden *Bikategorien*
- (Bei *strikter* Beibehaltung der Axiome: *2-Kategorien*.)

Hom-Mengen $\hom(K, L) \quad \mapsto$ Hom-Kategorien $\mathbf{hom}(K, L)$

# Bikategorien





## Beispiele

- Aus Kategorien werden *Bikategorien*
- (Bei *strikter* Beibehaltung der Axiome: *2-Kategorien*.)

Hom-Mengen $\hom(K, L)$ $\mapsto$ Hom-Kategorien $\mathbf{hom}(K, L)$
Kompositionsabbildungen $\mapsto$ Kompositionsfunktoren

# Bikategorien

## Beispiele

- Aus Kategorien werden *Bikategorien*
- (Bei *strikter* Beibehaltung der Axiome: *2-Kategorien*.)

$$\begin{array}{lll} \text{Hom-Mengen } \mathrm{hom}(K,L) & \mapsto & \text{Hom-Kategorien } \mathbf{hom}(K,L) \\ \text{Kompositionsabbildungen} & \mapsto & \text{Kompositionsfunktoren} \\ \text{Identitäten } 1 \xrightarrow{1_K} \mathrm{hom}(K,K) & \mapsto & \text{Funktoren } \mathbf{1} \xrightarrow{1_K} \mathbf{hom}(K,K) \end{array}$$

# Bikategorien

## Beispiele

- Aus Kategorien werden *Bikategorien*
- (Bei *strikter* Beibehaltung der Axiome: *2-Kategorien*.)

Hom-Mengen $\hom(K, L) \mapsto$ Hom-Kategorien $\mathbf{hom}(K, L)$
Kompositionsabbildungen $\mapsto$ Kompositionsfunktoren
Identitäten $1 \xrightarrow{1_K} \hom(K, K) \mapsto$ Funktoren $\mathbf{1} \xrightarrow{1_K} \mathbf{hom}(K, K)$

Natürliche Beispiele??? - Oder "dreht hier das kategorielle Denken ab"?

Dem kategorielle Paradigma folgend sind zwischen den Morphismen (auch "Objekte" des mathematischen Denkens) ebenfalls Morphismen zu betrachten! (Hom-Kategorien!)

Schon **Cat** ist - dank der Grundbegriffe der KT - nicht nur eine Kategorie, sondern eine 2-Kategorie!

| | |
|---|---|
| Objekte | Kategorien |
| 1-Morphismen | (Objekte der **hom**-Kategorien): Funktoren |
| 2-Morphismen | (Morphismen der **hom**-Kategorien): Natürliche Transformationen |

Dem kategorielle Paradigma folgend sind zwischen den Morphismen (auch "Objekte" des mathematischen Denkens) ebenfalls Morphismen zu betrachten! (Hom-Kategorien!)

Schon **Cat** ist - dank der Grundbegriffe der KT - nicht nur eine Kategorie, sondern eine 2-Kategorie!

| | |
|---|---|
| Objekte | Kategorien |
| 1-Morphismen | (Objekte der **hom**-Kategorien): Funktoren |
| 2-Morphismen | (Morphismen der **hom**-Kategorien): Natürliche Transformationen |

# Zwei nicht-kategorielle Beispiele

**Top** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Topologische Räume

1-Morphismen: stetige Abbildungen

2-Morphismen: Homotopieklassen

**Grp** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Gruppen $G, H$

1-Morphismen: Homomorphismen $f, g\colon G \to H$

2-Morphismen: $f \xrightarrow{x \in H} g : \quad g = \tau_x \circ f$

# Zwei nicht-kategorielle Beispiele

**Top** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Topologische Räume

1-Morphismen: stetige Abbildungen

2-Morphismen: Homotopieklassen

**Grp** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Gruppen $G, H$

1-Morphismen: Homomorphismen $f, g\colon G \longrightarrow H$

2-Morphismen: $f \xrightarrow{x \in H} g : \quad g = \tau_x \circ f$

# Zwei nicht-kategorielle Beispiele

**Top** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Topologische Räume

1-Morphismen: stetige Abbildungen

2-Morphismen: Homotopieklassen

**Grp** ist eine 2-Kategorie:

Objekte: Gruppen $G, H$

1-Morphismen: Homomorphismen $f, g \colon G \to H$

2-Morphismen: $f \xrightarrow{x \in H} g : \quad g = \tau_x \circ f$

Ringe bilden eine Bi-Kategorie:

| | |
|---|---|
| Objekte: | Ringe |
| hom-Kategorien: | Bimodul-Kategorien |
| Komposition: | Tensorprodukt |

Dies ist der "richtige" Kontext der Morita-Theorie!

# Kategorielle Gruppen

## Beispiel

- Aus Gruppen werden *kategorielle Gruppen* (monoidale Kategorien mit einem "Inversionsfunktor").

Beispiele:

1. Kategorielle Gruppen beschreiben 3-Cozykel von Cohomologiegruppen,
2. Verschränkte Moduln (= Strikte 2-Gruppen; *Whitehead*),
3. Gruppoide (= 1-objektige kateg. Gruppen; *Fundamentalgruppoide*),

Zusammen mit einem weiteren kategoriellen Prinzip (*Internalisierung*) erhält man z.B. 2-Lie-Gruppen und 2-Lie-Algebren (Geometrie, Physik).

# Kategorielle Gruppen

## Beispiel

- Aus Gruppen werden *kategorielle Gruppen* (monoidale Kategorien mit einem "Inversionsfunktor").

Beispiele:

1. Kategorielle Gruppen beschreiben 3-Cozykel von Cohomologiegruppen,
2. Verschränkte Moduln (= Strikte 2-Gruppen; *Whitehead*),
3. Gruppoide (= 1-objektige kateg. Gruppen; *Fundamentalgruppoide*),

Zusammen mit einem weiteren kategoriellen Prinzip (*Internalisierung*) erhält man z.B. 2-Lie-Gruppen und 2-Lie-Algebren (Geometrie, Physik).

# Ausblick und Probleme

Wer A sagt, muß auch B sagen!?

*... und zwischen den 2-Morphismen gibt es dann 3-Morphismen (u.s.w.)?*

JA! Z.B. n-Gruppoide (*Grothendieck*).

.... und mehr!

# Ausblick und Probleme

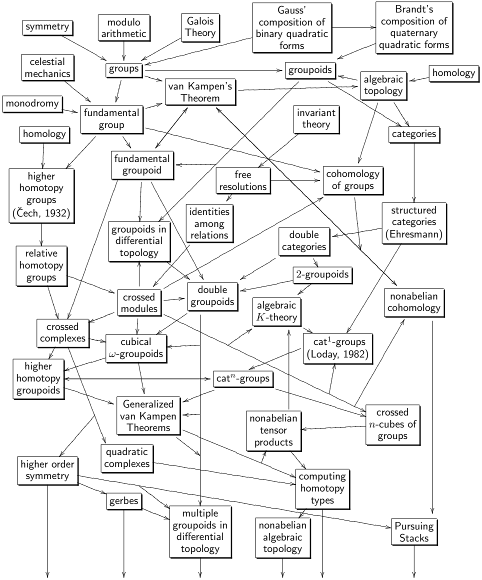
Wer A sagt, muß auch B sagen!?

*... und zwischen den 2-Morphismen gibt es dann 3-Morphismen (u.s.w.)?*

JA! Z.B. n-Gruppoide (*Grothendieck*).

.... und mehr!

## Some Context for Higher Dimensional Group Theory




Ronnie Brown, April, 2004.

This is a modified version of a diagram made in 1993, and recently done in xypic by Aaron Lauda, to whom much thanks. Comments welcome!


KATEGORIELLES DENKEN

HEP

Was ist das?

Die üblichen (Vor)Urteile

Einführendes Beispiel: Wie definiert man ℕ?

Kategorientheorie vs Mengenlehre

Der "Durchmarsch" der Mengenlehre

Die kategoriellen Ursprünge

Category Theory at Work

Linksadjungierte algebraischer Funktoren

Kategorielle Gruppen

# But...

... there's nothing like a free lunch!

**Problem**

*Kohärenz*: Welche Verträglichkeiten der die Gleichungen ersetzenden natürlichen Isomorphismen braucht man?

... however, today there's a free supper!

Danke für die Aufmerksamkeit!

... however, today there's a free supper!

Danke für die Aufmerksamkeit!